Modulul 2

Tratarea numerica a stabilităţii sistemelor automate de reglare

Obiective

- Funcţia de transfer
- Funcţiile de transfer ale sistemelor de elemente
- Criteriul numeric de stabilitate Routh-Hourwitz

2.1. Funcţia de transfer

Comportarea dinamica a elementelor si sistemelor se poate analiza pe baza răspunsului acestora in timp, atunci când la intrare se aplică semnale de diferite tipuri. Funcţiile de transfer si de frecvenţă constituie o modalitate de analiză a comportării dinamice a elementelor si sistemelor, larg utilizate în unele discipline cum sunt Automatica şi Ingineria chimică. Această nouă modalitate are la baza transformarea funcţiilor în timp şi a ecuaţiilor diferenţiale asociate sistemelor fizice în funcţii de variabilă complexă, care permit obţinerea de informaţii asupra comportării dinamice a sistemelor cu efort de calcul mai mic decât cel potrivit tratării directe a ecuaţiilor diferenţiale corespunzătoare [dinamica].

Se consideră sistemul monovariabil din figura 2.1.

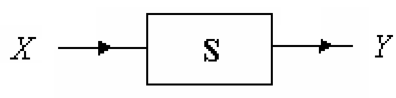

Fig. 2.1. Sistem fizic monovariabil.

Modelul matematic al sistemului este o ecuaţie diferenţială generală de forma

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + ... + a_1 \frac{dy}{dt} + y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + ... + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x \,. \qquad (2.1)$$

Aplicând transformata Laplace ecuaţiei diferenţiale (2.1) rezultă

$$D(s)Y(s) - O_Y(s) = P(s)X(S) - O_X(s). \qquad (2.2)$$

Functiile *Y(s)* si *X(s)* reprezintă transformatele Laplace ale variabilelor *y(t)* si *x(t)*:

$$Y(s) = L[y(t)]\ ; \qquad (2.3)$$

$$X(s) = L[x(t)]. \qquad (2.4)$$

Funcția *D(s)* este denumita *polinom caracteristic* al sistemului și are expresia

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + 1\,. \qquad (2.5)$$

Funcția *P(s)* reprezintă polinomul de acționare al sistemului și are expresia

$$P(s) = b_m s^m + b_{m-1} s^{n-1} + \ldots + b_1 s + b_0\,. \qquad (2.6)$$

Expresia (2.2) se aranjează sub forma

$$Y(s) = \frac{P(s)}{D(s)} X(s) + \frac{O_Y(s) - O_X}{D(s)}. \qquad (2.7)$$

Prin definiție, raportul *P(s)/D(s)* se numește *funcție de transfer a sistemului* și se notează cu *H(s)*

$$H(s) = \frac{P(s)}{D(s)}. \qquad (2.8)$$

Daca mărimea de intrare *x(t)* are o variație treaptă, termenii $O_Y(s)$ si $O_X(s)$ sunt nuli și în aceste condiții relația (2.7) devine

$$Y(s) = \frac{P(s)}{D(s)} X(s)\ . \qquad (2.9)$$

sau

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{P(s)}{D(s)} = H(s). \qquad (2.10)$$

Expresia (2.10) permite afirmația că, pentru condiții inițiale nule, funcția de transfer *H*(s) este egală cu raportul dintre transformata Laplace a mărimii de ieșire și transformata Laplace a mărimii de intrare.

Exemplu numeric. Să se determine funcția de transfer a unui sistem fizic descris de ecuația diferențială

$$2\frac{d^2 y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} + y = 1{,}5\, x,$$

având condițiile inițiale

$$\begin{cases} y(0_+) = 0 \\ y^{(1)}(0_+) = 0 \end{cases}.$$

Rezolvare. Aplicând transformata Laplace acestei ecuații se obține succesiv:

$$2s^2Y(s) + 5sY(s) + Y(s) = 1{,}5X(s),$$

sau

$$(2s^2 + 5s + 1)Y(s) = 1{,}5\,X(s),$$

respectiv

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = H(s) = \frac{1{,}5}{2s^2 + 5s + 1},$$

expresie care reprezintă funcția de transfer căutată.

2.2. Funcțiile de transfer ale sistemelor de elemente

Sistemele și sistemele chimice în special sunt alcătuite din elemente aflate în anumite conexiuni. Pentru a determina funcția de transfer a unui sistem compus, este necesară cunoașterea funcțiilor de transfer ale elementelor componente precum și modul de interconectare a acestora. Sunt cunoscute următoarele moduri de conectare ale elementelor simple ale sistemelor:

a) Conectarea în serie;
b) Conectarea în paralel;
c) Sisteme cu reacție.

A. Sisteme conectate în serie

Sistemul cu elemente înseriate are structura prezentata în figura 2.2 [marinoiu].

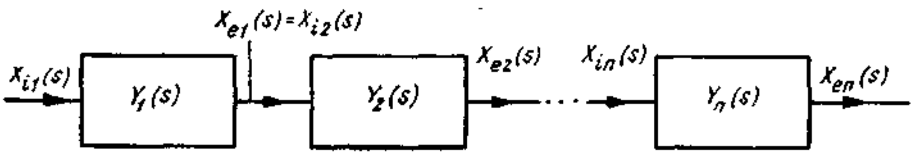

Fig. 2.2. Sistemul de elemente înseriate.

Pentru acest sistem, caracterizat prin condiţii iniţiale nule, funcția de transfer a sistemului are expresia generală

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=F(H_1,H_2,...H_n). \qquad (2.11)$$

Funcțiile de transfer ale elementelor conectate în serie au expresiile

$$\begin{cases} H_1(s)=\dfrac{Y_1(s)}{X_1(s)} \\ H_2(s)=\dfrac{Y_2(s)}{X_2(s)} \\ \vdots \\ H_n(s)=\dfrac{Y_n(s)}{X_n(s)} \end{cases}. \qquad (2.12)$$

Având in vedere ca mărimea de ieșire a unui element este mărime de intrare a elementului următor

$$\begin{cases} Y_1(s)=X_2(s) \\ Y_2(s)=X_3(s) \\ \vdots \\ Y_{n-1}(s)=X_n(s) \end{cases}, \qquad (2.13)$$

prin efectuarea produsului $H_1(s)*H_2(s)*\ldots*H_n(s)$, utilizând expresiile (2.13) se obţine

$$H_S=H_1*H_2*...*H_n=\prod_{i=1}^{n}H_i\ . \qquad (2.14)$$

Concluzie. Funcţia de transfer a unui sistem de elemente conectate în serie, fără interacţiune, se determină efectuând produsul funcţiilor de transfer ale elementelor componente.

B. Sisteme conectate în paralel

Sistemele conectate în paralel sunt caracterizate prin faptul ca au aceeaşi mărime de intrare iar mărimea de ieşire a sistemului rezultant se compune din suma mărimilor de ieşire din elemente. In figura 2.3 este prezentat un sistem cu doua elemente conectate in paralel [marinoiu].

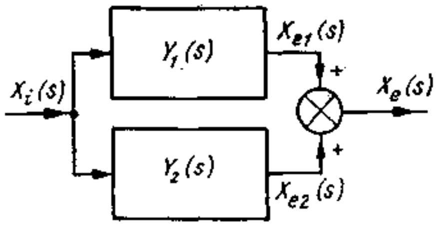

Fig. 2.3 Elemente conectate în paralel

Pentru condiții inițiale nule, funcţia de transfer a sistemului este de forma

$$H_S(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = F(H_1, H_2). \tag{2.15}$$

Funcțiile de transfer ale elementelor componente sunt

$$\begin{aligned} H_1(s) &= \frac{Y_1(s)}{X(s)} \\ H_2(s) &= \frac{Y_2(s)}{X(s)} \end{aligned}. \tag{2.16}$$

Având în vedere relația de însumare a ieșirilor

$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s), \tag{2.17}$$

și ținând cont de (2.15) se obține

$$H_S(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{Y_1(s) + Y_2(s)}{X(s)} = H_1(s) + H_2(s). \tag{2.18}$$

Dacă se reface raţionamentul pentru *n* elemente conectate în serie se obţine

$$H_S(s) = \sum_{i=1}^{n} H_i(s). \tag{2.19}$$

C. Sistem de elemente cu reacţie

Un sistem de elemente este definit ca un sistem cu reacție dacă unul dintre elemente readuce la intrarea celuilalt mărimea sa de ieșire, figura 2.4.

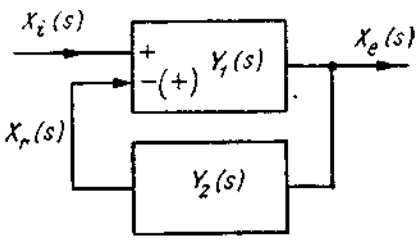

Fig. 2.4. Sistem de elemente cu reacție.

Mărimea de ieșire a sistemului, $Y(s)$, este adusă, prin intermediul elementului al doilea, ca a doua mărime de intrare a primului element. Există două tipuri de sisteme cu reacție: sisteme cu reacție negativă și sisteme cu reacție pozitivă. La sistemele cu reacţie negativă, efectul mărimii de reacţie se scade din efectul mărimii de intrare, ceea ce corespunde semnului ,, — " ; fenomenul este invers la sistemele cu reacţie pozitivă.

Funcția de transfer a sistemului este data de

$$H_S(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = F\left(H_1(s), H_2(s)\right). \tag{2.20}$$

Mărimea de ieșire a sistemului este calculată prin însumarea efectelor celor două intrări

$$Y(s) = X(s)H_1(s) \pm Y(s)H_1(s)H_2(s),$$

respectiv

$$Y(s) = \frac{X(s)H_1(s)}{1 \pm H_1(s)H_2(s)}. \tag{2.21}$$

Din relația (2.21), funcția de transfer a sistemului cu reacție este

$$H_S(s) = \frac{H_1(s)}{1 \pm H_1(s)H_2(s)}. \tag{2.22}$$

Semnul „+" sau „—" de la numitor depinde de tipul reacţiei, negativă „+" sau pozitivă „-".

Exemplu de calcul. Se consideră sistemul de reglare automată pentru care schema bloc este prezentata în figura 2.5.

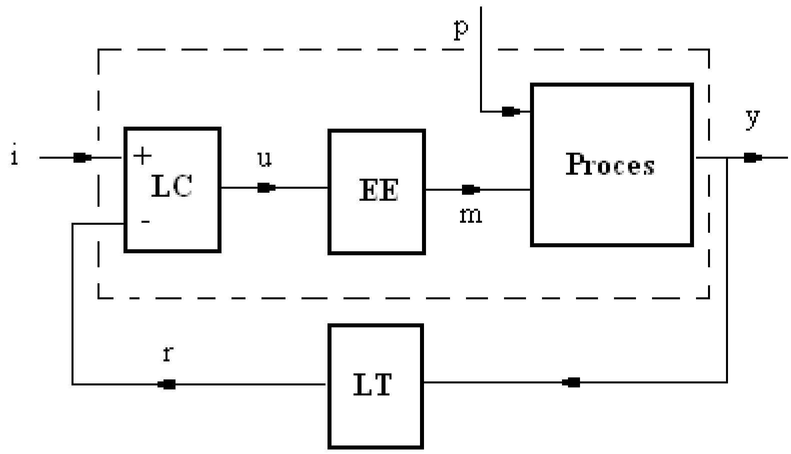

Fig. 2.5. Schema bloc a sistemului de reglare automata.

Sistemul este caracterizat prin funcțiile de transfer următoare:

- Regulator: $H_C(s) = \dfrac{U(s)}{I(s)}$; (2.23)

- Element execuție: $H_{EE}(s)=\dfrac{Q_m(s)}{U(s)}$; (2.24)
- Proces canalul mărime execuție – mărime de ieșire:

$$H_{pQm}(s)=\frac{Y_1(s)}{Q_m(s)}; \qquad (2.25)$$

- Proces canalul perturbație – mărime de ieșire:

$$H_{pp}(s)=\frac{Y_2(s)}{P(s)}; \qquad (2.26)$$

- Sumator proces: $H_{pr}(s)=H_{pQm}+H_{pp}$;
- Traductor: $H_T(s)=\dfrac{R(s)}{Y(s)}$. (2.27)

După cum se observă, sistemul se înscrie în categoria sistemelor cu reacție negativă, aplicându-se relația (2.22). Comparând figura 2.5 si 2.1 se constată că funcția H_1(s) este generată de H_C(s), H_{EE}(s) și H_{Qm}(s), subsisteme legate în serie. In consecință, funcția de transfer H_1(s) va fi

$$H_1(s)=H_C(s)*H_{EE}(s)*H_{pQm}(s) \qquad (2.28)$$

Tot din comparația figurilor 2.5 si 2.1 se identifică funcția de transfer H_2(s) ca fiind funcția de transfer a traductorului, H_T(s). Cu aceste precizări, funcția de transfer a SRA va fi

$$H_{SRA}(s)=\frac{H_C(s)*H_{EE}(s)*H_{pQm}(s)}{1+H_C(s)*H_{EE}(s)*H_{pQm}(s)H_T(s)}. \qquad (2.29)$$

Expresia $H_C(s)*H_{EE}(s)*H_{pQm}(s)*H_T(s)$ poartă denumirea de funcție de transfer a SRA pe canalul deschis (fără reacție)

$$H_{SRA-D}=H_C(s)*H_{EE}(s)*H_{pQm}(s)*H_T(s) \qquad (2.30)$$

2.3. Criteriul numeric de stabilitate Routh-Hourwitz

Criteriul de stabilitate Routh-Hourwitz este o metoda numerica de calcul a stabilității sistemelor automate. In cele ce urmează sunt prezentate etapele de calcul asociate acestei metode.

- ***Etapa 1. Ecuația caracteristică***

  Prin ecuație caracteristica se înțelege ecuația de forma

$$1 + H_{SRA-D}(s) = 0\,. \tag{2.31}$$

Introducând în relația (2.9) expresia (2.8) se obține

$$1 + H_C(s) * H_{EE}(s) * H_{pQm}(s) * H_T(s) = 0\,. \tag{2.32}$$

- ***Etapa 2. Forma polinomială a ecuației caracteristice***

Ecuația caracteristică (2.32) este un polinom de gradul *n*, având forma

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s^1 + a_0 = 0\,. \tag{2.33}$$

- ***Etapa 3. Generarea matricei Ruth-Hourwitz***

Modelul de calcul Ruth-Hourwitz implică generarea matricei următoare

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}. \tag{2.34}$$

Mecanismul de generare a matricei are următoarele reguli:

a) Elementul din colțul stânga sus este a_{n-1}.

b) Pentru o linie, elementul de rang *j* va fi elementul de rang *j-3*. Dacă rangul scade sub zero, în matrice se va introduce valoarea 0.

c) Pentru o coloană, elementul de rang *j* va fi elementul de rang *j+1*. Dacă rangul depășește valoarea *n*, în matrice se va introduce valoarea 0.

- ***Etapa 4. Condiția numerică de stabilitate***

Un sistem este stabil dacă simultan, determinantul principal și toți minorii acestuia sunt strict pozitivi

$$\begin{cases} \Delta_n > 0 \\ \Delta_{n-1} > 0 \\ \quad\vdots \\ \Delta_1 > 0 \\ \Delta_0 > 0 \end{cases}. \tag{2.35}$$

Exemplu pentru un polinom de gradul 3. Având în vedere faptul că problemele didactice de stabilitate ale sistemelor automate conduc la ecuații caracteristice de gradul 3 în *s*, în cele ce urmează se vor particulariza unele etape descrie anterior.

- Forma polinomială a ecuației caracteristice

$$a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s^1 + a_0 = 0 . \qquad (2.36)$$

- Expresiile determinanților

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} ; \qquad (2.37)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} ; \qquad (2.38)$$

$$\Delta_1 = a_2 . \qquad (2.39)$$

2.4. Probleme şi întrebări

2.4.1. Ce este transformata Laplace?

2.4.2. Ce este funcția de transfer?

2.4.3. In ce condiții se poate calcula funcția de transfer?

2.4.4. Desenați structura unui sistem cu subsisteme legate serie.

2.4.5. Prezentați funcția de transfer a sistemului alcătuit din subsisteme legate în serie.

2.4.6. Desenati structura unui sistem cu subsisteme legate în paralel.

2.4.7. Prezentați funcția de transfer a sistemului alcătuit din subsisteme legate în paralel.

2.4.8. Desenați structura unui sistem cu reacție negativă.

2.4.9. Prezentați funcția de transfer a sistemului cu reacție negativă.

2.4.10. Prezentați condiția numerică de stabilitate a criteriului Routh-Hurwitz.

2.4.11. Enumerați etapele de calcul numeric a verificării stabilității unui sistem automat.

2.4.12. Prezentați forma determinantului de ordinul 3.